

## 流れのエネルギー解析

### 1. 序 論

「流体」(fluid)と「流れ」(flow)

完全流体 非圧縮性・非粘性

完全流体の代表パラメータ  $\rho$ : 密度(mass density)

圧力(pressure)  $p$

単位面積あたり面に直行する力  $\Leftrightarrow$  等方的 (isotropic)

大気圧でゼロ (ゲージ圧) 大気圧を加えたものは絶対圧

水面からの鉛直下方にとった距離( $z$ )に比例  $p = \rho g z$   $\leftarrow$  静水圧(hydrostatic pressure)

流体を押し方向を正

\* 一般にいうところの水圧は流体から受ける全圧力  $P$

※ 静水圧からのずれ  $\leftarrow$  曲がった流れ

「流線」(stream line) と「流管」(stream tube)

流線を横切って水が流れない.

流れの境界(たとえば管壁)はひとつの流線.

流管内を流れる流量は一定  $\leftarrow$  質量保存則 = 連続式

(mass conservation) (continuity equation)

流速 (velocity)  $V$

流量 (flow rate, discharge)

フラックス(flux, 束) 質量(水, 濁質), エネルギー, 運動量

流管で運ばれるフラックス  $\phi V \delta A$

$\phi$ =媒質(運ばれるもの),  $\delta A$ =流管断面積

流れの連続式:  $V \delta A = const.$

### 2. Bernoulli の定理

- ① 非圧縮性かつ
- ② 非粘性の流体の
- ③ 定常流れ(steady flow)に対して,
- ④ 流線に沿って,

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = const. \quad (1) \text{ が成立する.}$$

位置水頭(potential head)+圧力水頭(pressure head)+速度水頭(velocity head)

.....  
 ピエゾ水頭(piezometric head)  $\Gamma$  + 速度水頭

ベルヌーイ和(total head)

位置：位置を決める基準面 (DL datum level)

水頭：水の単位重量あたりのエネルギー

Bernoulli 式の適用：

「流線上の 2 点についてベルヌーイ和が一定」

質点(単位体積)のエネルギー保存則と比較

位置エネルギー	運動エネルギー	内部(圧力)エネルギー
$\rho g z$	$\frac{\rho V^2}{2}$	$p$

保存則とは？ ⇒ コントロールボリューム(control volume)について  
(conservation law) **流入フラックス－流出フラックス＝貯留**

エネルギーフラックス  $\left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right) v \delta A$

微小断面積の\*流管の 2 つの断面においてエネルギーフラックスが等しい.

\* 断面内で流速や圧力, 位置が変われば上記のように簡単には表現できない.

$$\int_A \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) v \delta A = const.$$

上式では流速が位置の関数になっているので局所流速ということで小文字で表現した.  
流線に沿った軸を  $s$  軸とすると, 式(1)を微分して,

$$\frac{d}{ds} \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

Bernoulli の定理の基本的応用：

- (1) Torricelli の定理  $V = \sqrt{2gH}$
- (2) Venturi 管 管内流量の測定 ← 縮小断面部での圧力低下量  
(マノメータを用いた圧力測定)
- (3) Pitot 管(Prandtl 管) 流速計 ← 総圧管(よどみ点, stagnant point)と静圧管の  
ピエゾ水頭差
- (4) 管に沿った圧力分布
- (5) 水槽からの排水

### 3. 1次元エネルギー解析

たとえば管路内の流速  $v$  は断面内で変化し, 位置  $z$ , 圧力  $p$  も断面内で変化する.

断面内の量を用いて, Bernoulli 式を形式的に適用したい.

位置水頭, 圧力水頭は断面内で変化するが, その変化は補完的で, ピエゾ水頭を用いれば断面内で一定に保たれる.

$$\Gamma = \frac{p - \rho g z'}{\rho g} + (z + z')$$

断面 A を通過するエネルギーフラックス  $F_E$

$$F_E \equiv \int_A \left( \Gamma + \frac{v^2}{2g} \right) v dA = \Gamma Q + \frac{V^3}{2g} \int_A \left( \frac{v}{V} \right)^3 dA$$

断面平均エネルギー  $E \equiv \frac{F_E}{Q}$   $Q = VA$

$$E = \Gamma + \frac{\alpha V^2}{2g}$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{v}{V} \right)^3 dA \quad \text{Coriolis 係数(エネルギー補正係数)}$$

異なる 2 断面間で 1 次元化された Bernoulli 式が成り立つ.

これはエネルギー保存則  $F_E = EQ = \text{const.}$

#### 4. 損失水頭 (head loss)

異なる 2 断面間のエネルギー損失 ← 粘性流体 (特性は粘性係数  $\mu$  で表現) viscosity

↓  $(\nu \equiv \mu / \rho$  : 動粘性係数 kinematic viscosity)

「損失水頭」(head loss)  $h_L$  として表現

(その断面までの累積エネルギー損失を水頭表示したもの)

$$\Gamma + \frac{\alpha V^2}{2g} + h_L = \text{const.}$$

$$\frac{d\Gamma}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{\alpha V^2}{2g} \right) + \frac{dh_L}{ds} = 0$$

$$I_e \equiv \frac{dh_L}{ds} \quad : \text{エネルギー(損失)勾配}$$

エネルギー損失 = 摩擦損失(friction loss) + 形状損失(shape loss)

$$\text{摩擦損失水頭} = f \frac{L V^2}{D 2g} \quad \text{Darcy-Weisbach の摩擦損失水頭}$$

$f$  : Darcy-Weisbach の摩擦損失係数 (friction factor)

← Nikradse の実験による Stanton の図表  $f \sim \text{Re} \equiv \frac{VD}{\nu}$

Reynolds 数

形状損失 ← 渦運動によるエネルギー散逸

↑

断面の急激な変化 急拡(sudden expansion), 急縮(contraction), 曲がり,

管の入口, 出口その他

$$\text{形状損失水頭} = \zeta_i \frac{V_i^2}{2g}$$

$\zeta_i$  : 断面急変部それぞれに対応する形状損失係数

$V_i$  : 断面急変前後の大きいほうの流速

さまざまな形状損失係数の値のほとんどは実験的に調べられたものが与えられる。ただし, 以下の急拡損失(Borda-Carnot 損失)係数は, 運動量保存則から解析的に求められるので, 導けることおよび記憶しておく必要あり。

$$\zeta_{se} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

管の出口損失係数は, 空中へ出る場合には 0, 静水中へ出る場合は 1.0

#### [演習問題]

水槽から空中 (または他の水槽) へ管路で水が輸送される。

管はいくつかの区間ごとに管径  $D$ , Darcy-Weisbach の摩擦損失係数  $f$  が異なり(摩擦損失), が入り口から出口までの間に, 急拡, 急縮, 曲がりなどの変化を受ける(形状損失)。

エネルギー線, ピエゾ水頭線

この管で運ばれる流量

各断面での管壁圧力

### 5. 非定常効果

Bernoulli 式でさまざまな解析をするにあたり, 非定常項は以下のように付加。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

基本問題 : U 字管振動

応用演習問題 : V 字管振動, 連結された水槽水面振動

### 6. サイフォン (siphon)

水槽と水槽を管で連結して障害物を越して流す装置

管の一部で圧力が絶対圧でゼロ以下(負圧, ゲージ圧の水頭表示で-10.33m)にはなりえず, 流れが途切れる。

実際には-8.0~-8.5m が限界 ⇔ 飽和蒸気圧 → キャビテーション

伏越(inverted siphon)

流れのエネルギー解析 付図

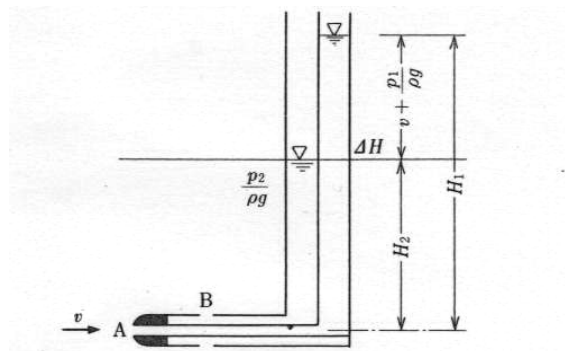


図1 ピトー管

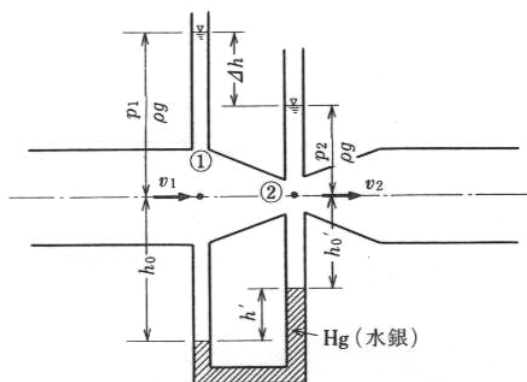


図2 ベンチュリー管

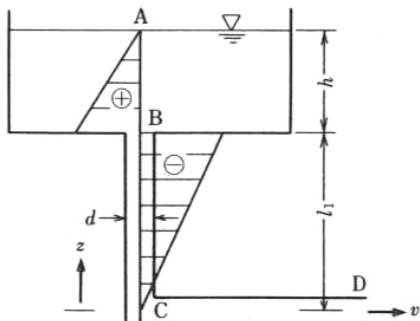


図3 水槽からの排水

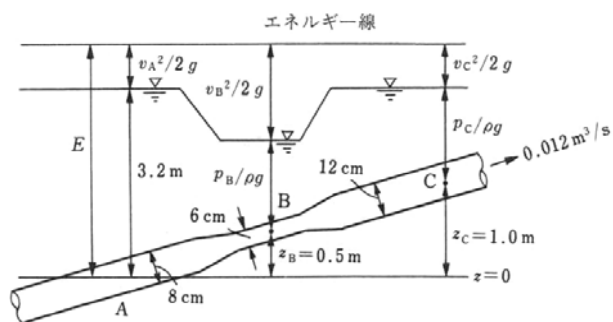


図4 各水頭(摩擦損失のない場合)

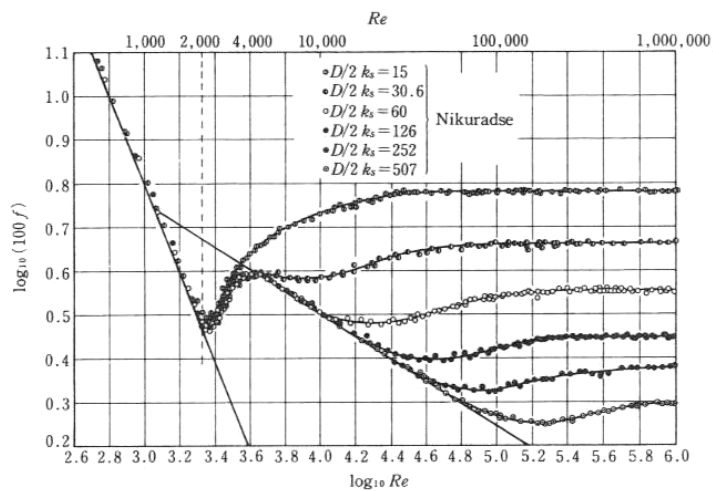


図5 ニクラゼの実験によるスタントンの図表

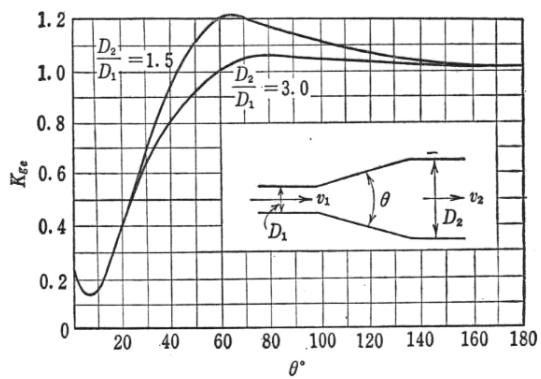


図6 管の拡大に伴う形状損失係数

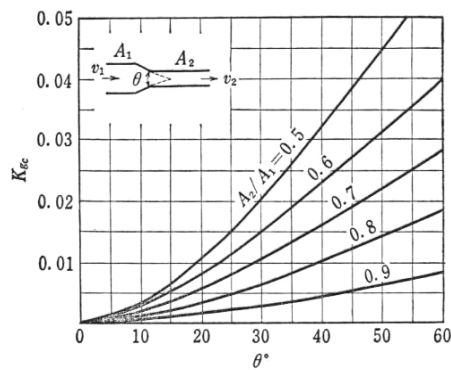


図7 管の縮小に伴う形状損失係数

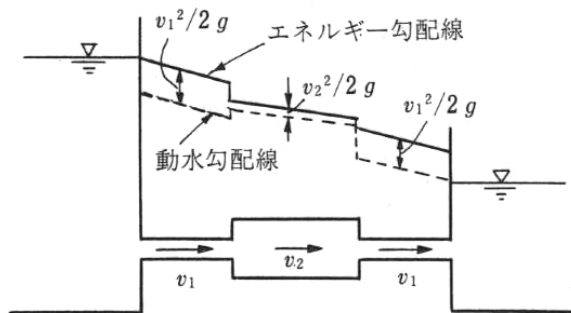


図8 損失を伴う管路流れのエネルギー線とピエゾ水頭線

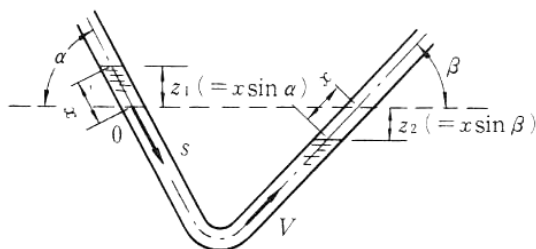


図5 V字管振動

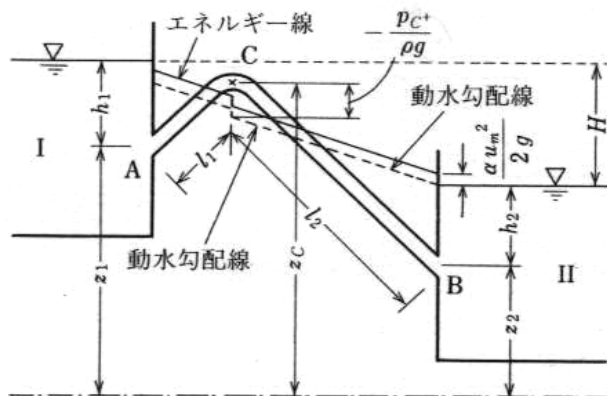


図6 サイフォン